RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

- O MÉTODO GRÁFICO -

Depois de formular um problema de Programação Linear, muitas vezes é necessário resolvê-lo.

Comecemos por considerar o **problema 1** apresentado quando se abordou a "Formulação de Problemas de Programação Linear" e que se formulava do modo seguinte:

Seja X_i a quantidade (em toneladas) de farinha i = A ; B a produzir semanalmente, com $X_i \geq 0$.

$$\text{MAX } F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$$

sujeito a:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B &\leq 20 \\
3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B &\leq 30 \\
1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B &\geq 5
\end{aligned}
$$

$$X_A \, , X_B \geq 0 \, .$$

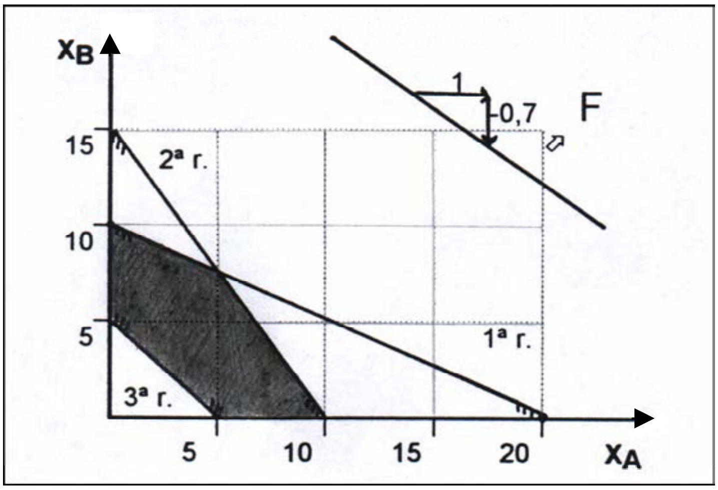
Uma primeira constatação diz respeito ao número de variáveis: temos **duas variáveis**, o que nos permite optar por uma **abordagem gráfica**, já que é fácil a representação gráfica bidimensional. De notar que a existência de três variáveis nos obrigaria a representações gráficas tridimensionais, o que não seria muito prático... Como se torna evidente, num problema de Programação Linear com três ou mais variáveis a resolução por via gráfica está completamente fora de causa... Abordaremos, posteriormente, métodos analíticos que utilizaremos nessas situações (e que também poderiam ser utilizados em problemas com duas variáveis).

Uma segunda constatação diz respeito à **não negatividade das variáveis**, o que nos reduz ao 1º quadrante do referencial.

Poderemos ainda constatar que **cada restrição corresponde a uma região do plano delimitada por uma recta**.

Finalmente, pode verificar-se que **para cada valor de F, a função objectivo corresponde a uma recta**. Ou seja, $F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$ representa uma família de rectas paralelas de declive - 0,7 ($X_B = F / 10 - 7/10 \cdot X_A$) . Ainda relativamente à função objectivo, poderemos observar que se se pretende **maximizar F** e se o coeficiente de X_A é positivo, então interessa-nos **incrementar o valor de X_A**; analogamente,sendo positivo o coeficiente de X_B, também nos interessa **incrementar o valor de X_B**. Conclui- -se, assim, que para incrementar o valor da função objectivo deve-se aumentar simultaneamente X_A e X_B.

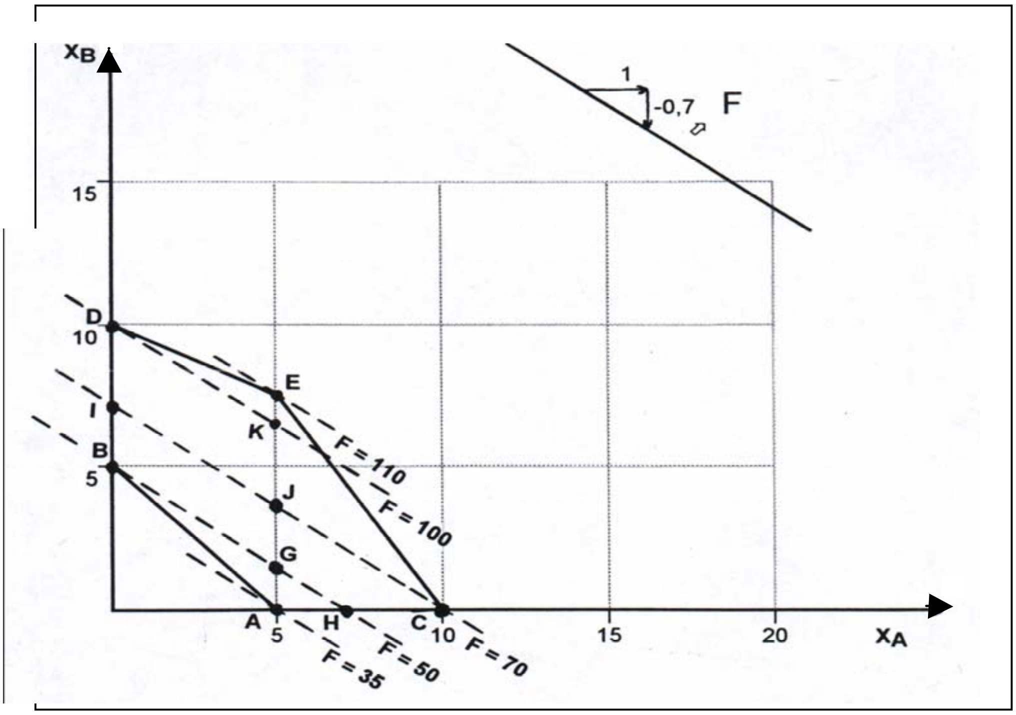
Observemos a representação gráfica das três restrições do problema:



A zona sombreada na figura anterior, corresponde ao conjunto de pontos que respeitam simultaneamente as três restrições, bem como às condições de não negatividade das variáveis, pelo que a designaremos por **espaço de soluções admissíveis**.

A função objectivo, como já tínhamos observado, aumenta de valor quando as variáveis X_A e X_B crescem simultaneamente. Assim, as rectas que representam a função objectivo F deverão ser deslocadas, tanto quanto possível, no sentido ⇗ .

Observemos, com atenção, os pontos assinalados no espaço de soluções admissíveis representado em seguida:



A **pior** solução admissível corresponde ao ponto **A**. Com efeito, se imaginarmos uma recta de declive -0,7 a movimentar-se no sentido ⬀ , o primeiro ponto do espaço de soluções admissíveis a ser tocado pela recta seria exactamente o ponto **A (5 ; 0)**, a que corresponde o valor da função objectivo **F = 35** .

Uma solução admissível melhor que **A** seria, por exemplo, **B (0 ; 5)** a que corresponde o valor da função objectivo **F = 50**. De notar que uma recta de declive -0,7 que passe por **B** conterá uma infinidade de pontos pertencentes ao espaço de soluções admissíveis. Por exemplo, os pontos **G (5 ; 1,5)** e **H (50/7, 0)** correspondem a duas dessa soluções admissíveis com o valor da função objectivo **F = 50**.

Prosseguindo o movimento da recta de declive -0,7 no sentido ⬀ , encontramos os pontos **C (10 ; 0)**, **I (0 ; 7)** e **J (5 ; 3,5)** que são algumas das infinitas soluções admissíveis que correspondem ao valor da função objectivo **F = 70**.

Continuando a procura de melhores soluções (isto é, prosseguindo o movimento da recta de declive -0,7 no sentido ⬀), encontramos os pontos **D (0 ; 10)** e **K (5 ; 6,5)** que são algumas das infinitas soluções admissíveis que correspondem ao valor da função objectivo **F = 100**.

Prosseguindo o movimento da recta de declive -0,7 no sentido ⬀, tocamos no ponto **E (5 ; 7,5)** do espaço de soluções admissíveis a que correponde o valor da função objectivo **F = 110**. De notar que se prosseguirmos o movimento da recta de declive -0,7 no sentido ⬀ deixaremos de intersectar o espaço de soluções admissíveis, pelo que não é possível aumentar o valor da função objectivo além do valor 110 (respeitando simultaneamente as três restrições e as condições de não negatividade das variáveis). Podemos, assim, concluir que terminamos a nossa procura da solução óptima: ela corresponde ao ponto **E (5 ; 7,5)** do espaço de soluções admissíveis e ao valor da função objectivo **F = 110**. Ou seja,

$$X_A^* = 5{,}0 \; ; \; X_B^* = 7{,}5$$

$$F^* = 110 \, .$$

Se nos recordarmos do enunciado, poderemos "traduzir" a solução: a FARLACT deve produzir semanalmente 5,0 toneladas de farinha A e 7,5 toneladas de farinha B, sendo de 110 u.m. o correspondente lucro semanal.

Como podemos observar, para procurarmos a solução óptima de um Problema de Programação Linear (com **duas** variáveis) através do **Método Gráfico**, começamos por representar o espaço de soluções admissíveis e identificar uma recta pertencente à família de rectas paralelas correspondente à função objectivo. Em seguida deslocamos essa recta, tanto quanto possível, no sentido que permite *melhorar* o seu valor (*melhorar* ≡ aumentar se se pretender maximizar a função objectivo, ou diminuir o seu valor, caso contrário). A solução óptima será a *última* a ser tocada por essa "recta em movimento".

Uma constatação parece ser imediata: **a solução óptima de um problema de Programação Linear é um vértice do espaço de soluções admissíveis !**

A afirmação anterior não é, no entanto, absolutamente correcta ...

Imaginemos que, no problema que se resolveu para apresentar o Método Gráfico se altera a função objectivo de $F = 7 \, . \, X_A + 10 \, . \, X_B$ para $\mathbf{F = 5 \, . \, X_A + 10 \, . \, X_B}$ (que se pretende maximizar), mantendo-se inalteradas as restrições.

Como se vê a nova função objectivo representa a família de rectas paralelas de declive - 0,5 , verificando-se um aumento de F quando se desloca uma das rectas referidas no sentido ⬀.

O ponto **A (5 ; 0)** corresponde à pior solução admissível com o valor da função objectivo **F = 25** .

Uma solução admissível melhor que **A** seria, por exemplo, **B (0 ; 5)** a que corresponde o valor da função objectivo **F = 50**. De notar que uma recta de declive -0,5 que passe por **B** conterá uma infinidade de pontos pertencentes ao espaço de soluções admissíveis (por exemplo, o ponto **C (10 ; 0)**) correspondentes ao valor da função objectivo **F = 50**.

Prosseguindo o movimento da recta de declive -0,5 no sentido ⬀ , encontramos os pontos **D (0 ; 10)** e **E (5 ; 7,5)** (e os infinitos pontos no segmento de recta **DE**) que são soluções correspondentes ao valor da função objectivo **F = 100**... E constatamos não ser possível prosseguir o movimento da recta de declive -0,5 no sentido ⬀ sem se deixar de intersectar o espaço de soluções admissíveis, pelo que não é possível aumentar o valor da função objectivo além do valor 100 (respeitando simultaneamente as três restrições e as condições de não negatividade das variáveis).

Podemos, assim, concluir que o "problema alterado" (com $\mathbf{F = 5 \cdot X_A + 10 \cdot X_B}$) admite **múltiplas soluções óptimas**: **D (0 ; 10)** e **E (5 ; 7,5)** são soluções óptimas e são vértices do espaço de soluções admissíveis; todos os pontos do segmento de recta **DE** são soluções óptimas do "problema alterado" (sendo 100 o correspondente valor óptimo de F). Poderemos representar analiticamente este resultado do modo seguinte:

$$\mathbf{(X_A^* ; X_B^*) = \lambda \cdot (0 ; 10) + (1 - \lambda) \cdot (5 ; 7{,}5) \quad com\ \lambda \in [0 ; 1]}$$

$$\mathbf{F^* = 100 .}$$

Na representação analítica anterior, se λ **= 0**, então $\mathbf{(X_A^* ; X_B^*) = (5 ; 7{,}5) = E}$; se λ **= 1**, então $\mathbf{(X_A^* ; X_B^*) = (0 ; 10) = D}$. Se $\lambda \in$ **] 0 ; 1 [** , então $\mathbf{(X_A^* ; X_B^*)}$ pertence ao segmento de recta **DE** (mas **não** às extremidades desse segmento - os vértices D e E do espaço de soluções admissíveis). De notar que, por exemplo se $\lambda = 0{,}5$, $(X_A^* ; X_B^*) = (2{,}50 ; 8{,}75)$ - o ponto médio do segmento de recta DE; se $\lambda = 0{,}1$, $(X_A^* ; X_B^*) = (4{,}5 ; 7{,}75)$, ou seja, à medida que λ aumenta, a solução óptima afasta-se do vértice E, aproximando-se do vértice D.

Poderemos agora voltar à constatação que nos parecera ser imediata: **"a solução óptima de um problema de Programação Linear é um vértice do espaço de soluções admissíveis"** ... Como acabámos de observar, esta afirmação, para estar absolutamente correcta, precisa de um "retoque": **"a solução óptima de um problema de Programação Linear, <u>se for única</u>, é um vértice do espaço de soluções admissíveis"**.

A propósito da afirmação anterior, deixo-vos três exercícios muito simples, mas muito interessantes:

Utilizando o Método Gráfico, determine a solução óptima dos três problemas de Programação Linear seguintes:

- 1 -

$$\text{MAX } F = 0 \cdot X_A + 0 \cdot X_B$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} 1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B &\leq 20 \\ 3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B &\leq 30 \\ 1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B &\geq 5 \end{aligned}$$

$$X_A \, , X_B \geq 0 \, .$$

- 2 -

$$\text{MAX } F = -2 \cdot X_A + 1 \cdot X_B$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} -1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B &\leq 5 \\ 1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B &\geq 5 \end{aligned}$$

$$X_A \, , X_B \geq 0 \, .$$

- 3 -

$$\text{MAX } F = -2 \cdot X_A + 2 \cdot X_B$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} -1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B &\leq 5 \\ 1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B &\geq 5 \end{aligned}$$

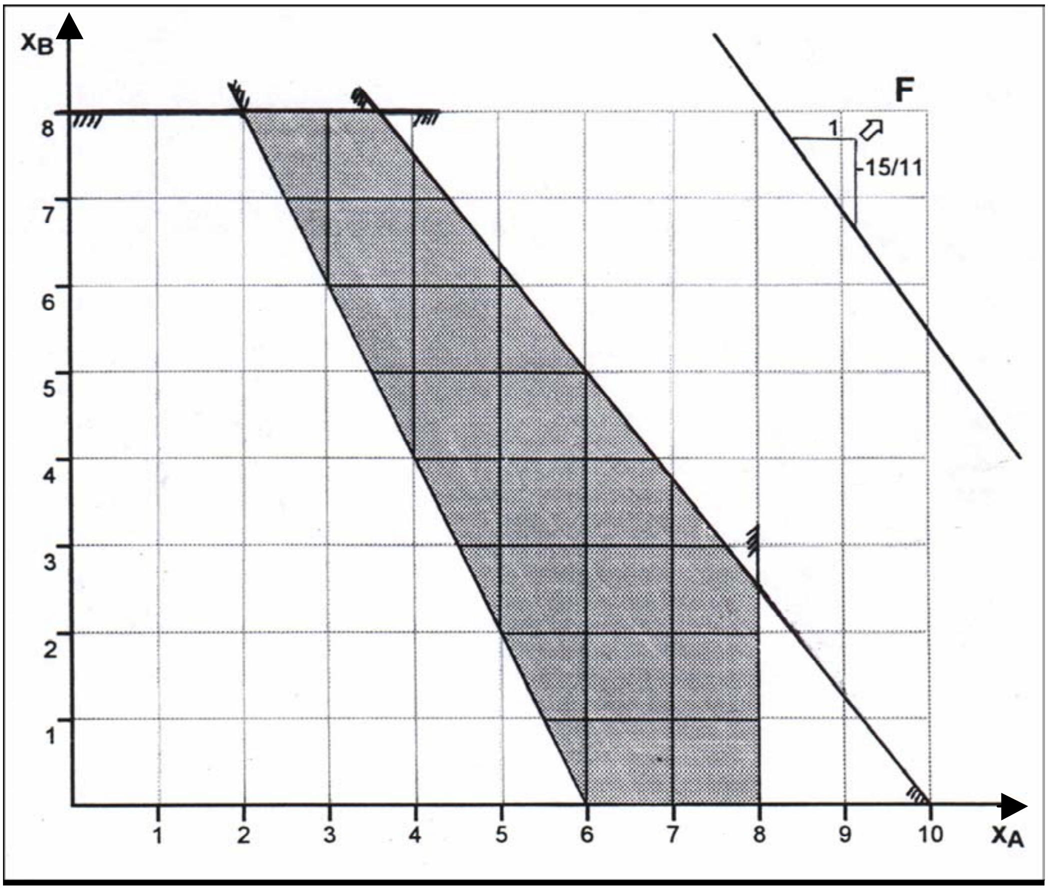
$$X_A \, , X_B \geq 0 \, .$$

Aproveitemos a abordagem ao **Método Gráfico** para discutirmos, com brevidade, algumas questões ligadas à **resolução de problemas de Programação Linear Inteira**.

Consideremos o seguinte problema de Programação Linear Inteira (P.L.I.) :

$$
\begin{array}{l}
\textbf{MAX } F = 15 \cdot X_A + 11 \cdot X_B \\
\textbf{sujeito a:} \\
\begin{array}{rcrcl}
X_A & & & \leq & 8 \\
 & & X_B & \leq & 8 \\
20 \cdot X_A & + & 10 \cdot X_B & \geq & 120 \\
10 \cdot X_A & + & 8 \cdot X_B & \leq & 100
\end{array} \\
X_A \, , X_B \geq 0 \ \textbf{e inteiras.}
\end{array}
$$

Esbocemos a sua resolução gráfica:



Chamamos "**problema relaxado**" ao problema de Programação Linear resultante da relaxação da condição de integralidade das variáveis (isto é, da sua não consideração) no problema de P.L.I. . Na representação gráfica anterior, sombreou-se o espaço de soluções admissíveis do problema relaxado. A resolução gráfica do problema relaxado é muito fácil, conduzindo à solução óptima **$(X_A^* \, ; X_B^*)_{PL} = (8 \, ; 2{,}5)$** a que corresponde o valor óptimo da função objectivo **$F_{PL}^* = 147{,}5$**.

Como se pode observar, esta solução óptima não respeita a condição de integralidade da variável X_A* , pelo que não é "aceitável" como solução óptima do problema de P.L.I. .

Observando, com muita atenção, a representação gráfica apresentada, podemos concluir que o espaço de soluções admissíveis do problema de P.L.I. é constituído unicamente pelos "pontos inteiros" assinalados na zona sombreada. Assim, a solução óptima do problema de P.L.I., é o último desses pontos a ser tocado pela recta de declive -15/11 em movimento no sentido ⇗, ou seja, **(X_A* ; X_B*)$_{PLI}$ = (6 ; 5)** a que corresponde o valor óptimo da função objectivo **F_{PLI}* = 145,0**.

Dois comentários devem ser feitos:

- Dado que o espaço de soluções admissíveis do problema de P.L.I. está contido no espaço de soluções admissíveis do correspondente problema relaxado, pode afirmar-se que **o valor óptimo da função objectivo no problema de P.L.I. será sempre pior ou igual ao valor óptimo da função objectivo no correspondente problema relaxado**.

- **Não se pode resolver um problema de P.L.I. "arredondando" a solução óptima do correspondente "problema relaxado" para a solução inteira admissível "mais próxima"**. Se tal tivesse sido feito no problema acima apresentado, arredondaríamos (8 ; 2,5) para (8 ; 2) (já que (8 ; 3) não é solução do problema !), obtendo-se F = 142,0 (valor inferior ao valor óptimo: 145,0). É interessante notar que uma outra solução inteira admissível "mais próxima" de (8 ; 2,5) seria (7 ; 3) a que corresponderia o valor F = 138,0... É preciso "afastarmo-nos" mais de (8 ; 2,5) para encontrarmos (6 ; 5) que vem a ser a solução óptima do problema de P.L.I. !

A propósito da utilização do Método Gráfico na resolução de problemas de Programação Linear Inteira, deixo-vos um último exercício muito simples, mas muito interessante:

Considere o seguinte problema de optimização:

MAX F = 5. X_A + 6. X_B

sujeito a:

$$2 . X_A + 3 . X_B \leq 16$$
$$3 . X_A + 2 . X_B \leq 17$$

a) Utilizando o "Método Gráfico", resolva-o considerando:

I)	**X_A , X_B ≥ 0**	**(Programação Linear)**
II)	**X_A ≥ 0 e inteira ; X_B ≥ 0**	**(Programação Linear Mista)**
III)	**X_A ≥ 0 ; X_B ≥ 0 e inteira**	**(Programação Linear Mista)**
IV)	**X_A , X_B ≥ 0 e inteiras**	**(Programação Linear Inteira)**

b) Compare as soluções obtidas na alínea a).

PROGRAMAÇÃO LINEAR: CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Consideremos um **problema de Programação Linear** apresentado na sua forma standard:

Maximizar $F = c_1 . X_1 + c_2 . X_2 + c_3 . X_3 + ... + c_n . X_n$

sujeito a:

$$a_{11} . X_1 + a_{12} . X_2 + a_{13} . X_3 + ... + a_{1n} . X_n = b_1$$
$$a_{21} . X_1 + a_{22} . X_2 + a_{23} . X_3 + ... + a_{2n} . X_n = b_2$$
$$...$$
$$a_{m1} . X_1 + a_{m2} . X_2 + a_{m3} . X_3 + ... + a_{mn} . X_n = b_m$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , ... , X_n \geq 0$$

Este problema pode escrever-se numa forma mais compacta:

Maximizar $F = \sum_{k=1}^{n} c_k . X_k$ **[1]**

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} . X_k = b_i \qquad i = 1, 2, ... , m \qquad [\ 2\ ]$$

$$X_k \geq 0 \qquad k = 1, 2, ... , n \qquad [\ 3\ ]$$

Utilizando a notação matricial poderemos ainda simplificar a apresentação do problema:

Maximizar $F = C . X$ **[1]**

sujeito a:

$$A . X = b \qquad [\ 2\ ]$$

$$X \geq 0 \qquad [\ 3\ ]$$

Na representação anterior, o vector das incógnitas **X** é um vector coluna (n x 1), o vector dos coeficientes da função objectivo **C** é um vector linha (1 x n), a matriz dos coeficientes das restrições **A** é uma matriz (m x n) e o vector dos termos independentes **b** é um vector coluna (m x 1). De notar que **0** é o vector nulo do tipo (n x 1).

Relativamente a um problema de Programação Linear expresso na forma standard, com n variáveis e m restrições (sendo n > m), podem apresentar-se as seguintes definições :

- **Solução** é todo o n-uplo (v_1, v_2, ... , v_n) associado às variáveis (X_1, X_2, ... , X_n) que verificam as restrições [2] .

- **Solução admissível** é toda a solução que verifica as condições de não negatividade [3] .

- **Solução básica (s.b.)** é toda a solução constituída por **(n - m) variáveis não básicas (variáveis com valor nulo)**, sendo as restantes **m variáveis básicas** determinadas univocamente. Relativamente a uma solução básica, designa-se por **base** o conjunto das variáveis básicas.

  [Para que as m variáveis básicas possam ser determinadas univocamente, ter-se-á que exigir que a submatriz de **A**, correspondente aos coeficientes das variáveis básicas - que viremos a designar por **B** - seja regular, isto é, que o seu determinante seja não nulo.]

- **Solução básica admissível (s.b.a.)** é toda a solução básica que verifica as condições de não negatividade [3] .

- **Solução básica admissível não degenerada** é toda a s.b.a. cujas variáveis básicas tomem valores estritamente positivos. Se alguma variável básica de uma s.b.a. for nula, estar-se-á perante uma **solução básica admissível degenerada**.

- **Solução óptima** é toda a solução que torna máximo o valor da função objectivo [1]. [Geralmente, só nos interessa determinar uma solução óptima que seja admissível ...]

Sintetizando, poderemos apresentar o quadro seguinte:

<table>
<tr><td colspan="5">n-uplo (v_1, v_2, ... , v_n) associado às variáveis (X_1, X_2, ... , X_n)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Verifica as Restrições [2] ?</td></tr>
<tr><td colspan="4">Sim ⇒ É solução</td><td>Não ⇒ Não é solução</td></tr>
<tr><td colspan="4">Verifica as Condições de Não Negatividade das Variáveis [3] ?</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Sim ⇒ É solução admissível</td><td colspan="2">Não ⇒ É solução não admissível</td></tr>
<tr><td colspan="2">É básica ?</td><td colspan="2">É básica ?</td></tr>
<tr><td>Sim: s.b.a.</td><td>Não: s.n.b.a</td><td>Sim: s.b.n.a.</td><td>Não: s.n.b.n.a</td></tr>
</table>

Para uma melhor assimilação das noções apresentadas, recordemo-nos do **problema 1** apresentado quando se abordou a "Formulação de Problemas de Programação Linear" e retomado na apresentação do "Método Gráfico":

$$\text{MAX } F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$$

sujeito a:

$$1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \le 20$$
$$3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \le 30$$
$$1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B \ge 5$$

$$X_A \, , X_B \ge 0 \, .$$

É fácil passar-se à forma standard:

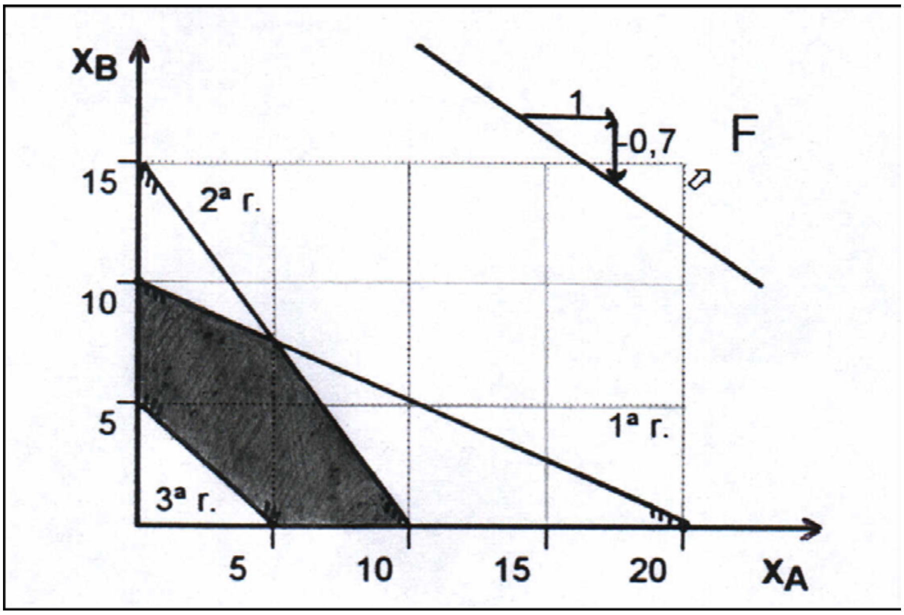
$$\text{MAX } F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3$$

sujeito a:

$$1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B + 1 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 = 20$$
$$3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B + 0 \cdot F_1 + 1 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 = 30$$
$$1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 - 1 \cdot F_3 = 5$$

$$X_A \, , X_B \, , F_1 \, , F_2 \, , F_3 \ge 0 \, .$$

Recordemos a representação gráfica das três restrições do problema:



Aproveitemos a figura anterior (em que se sombreou o **espaço de soluções admissíveis**) para observar os pontos que se indica no quadro seguinte e classificá-los adequadamente:

Ponto	Variáveis					Não é	É solução				
nº	X_A	X_B	F_1	F_2	F_3	solução	s.b.a	s.n.b.a.	s.b.n.a.	s.n.b.n.a.	Obs.
1	0	0	20	30	-5	✓					Origem do Ref.
2	10	5	0	-10	10	✓					∈ 1ª restr.
3	7	-1	15	11	1					✓	
4	-10	15	0	30	0				✓		Inters. 1ª/3ª restr.
5	-1	6	11	9	0					✓	∈ 3ª restr.
6	5	0	15	15	0		✓				Vértice esp.sol.adm.
7	6	0	14	12	1			✓			∈ eixo X_A
8	10	0	10	0	5		✓				Vértice esp.sol.adm.
9	20/3	5	10/3	0	20/3			✓			∈ 2ª restr.
10*	**5**	**7,5**	0	0	7,5		✓				Vértice esp.sol.adm.
11	2	9	0	6	6			✓			∈ 1ª restr.
12	0	10	0	10	5		✓				Vértice esp.sol.adm.
13	0	8	4	14	3			✓			∈ eixo X_B
14	0	5	10	20	0		✓				Vértice esp.sol.adm.
15	3	2	13	17	0			✓			∈ 3ª restr.
16	5	5	5	5	5			✓			∈ Int. esp.sol.adm.
17	7	3	7	3	5			✓			∈ Int. esp.sol.adm.

Nota (*) : Destacou-se o ponto nº 10 correspondente à solução óptima do problema.

Relembremo-nos que o problema em análise tem 3 restrições e 5 variáveis (na forma standard). Assim, uma solução para ser básica deverá ser constituída por duas variáveis não básicas (isto é, nulas).

Uma primeira constatação pode ser feita: **todas as soluções básicas admissíveis são vértices do espaço de soluções admissíveis !** Podemos observar que o ponto nº 4 é um vértice do espaço de soluções (admissíveis, ou não) e é uma solução básica não admissível; se determinarmos o vértice do espaço de soluções resultante da intersecção da 2ª com a 3ª restrição poderemos concluir estar perante uma outra solução básica não admissível - em geral, **todas as soluções básicas são vértices do espaço de soluções !**

Observemos que **os pontos pertencentes ao interior do espaço de soluções admissíveis não têm variáveis nulas**. **Os pontos pertencentes a uma aresta (mas não a um vértice !) apresentam apenas uma variável nula** - a variável de folga correspondente à restrição que origina a aresta, ou a a variável correspondente ao eixo que origina a aresta. **Os pontos correspondentes aos vértices têm duas variáveis nulas** - a(s) variável(eis) de folga correspondente(s) à(s) restrição(ões) e/ou a(s) variável(eis) correspondente(s) ao(s) eixo(s) que originam o vértice.

Consideremos agora uma pequena variante do problema apresentado:

$$\text{MAX } F = 5 . X_A + 10 . X_B$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
1 . X_A + 2 . X_B &\leq 20 \\
3 . X_A + 2 . X_B &\leq 30 \\
1 . X_A + 1 . X_B &\geq 5 \\
1 . X_A + 1 . X_B &\leq 12{,}5
\end{aligned}$$

$$X_A , X_B \geq 0 .$$

É fácil passar-se à forma standard:

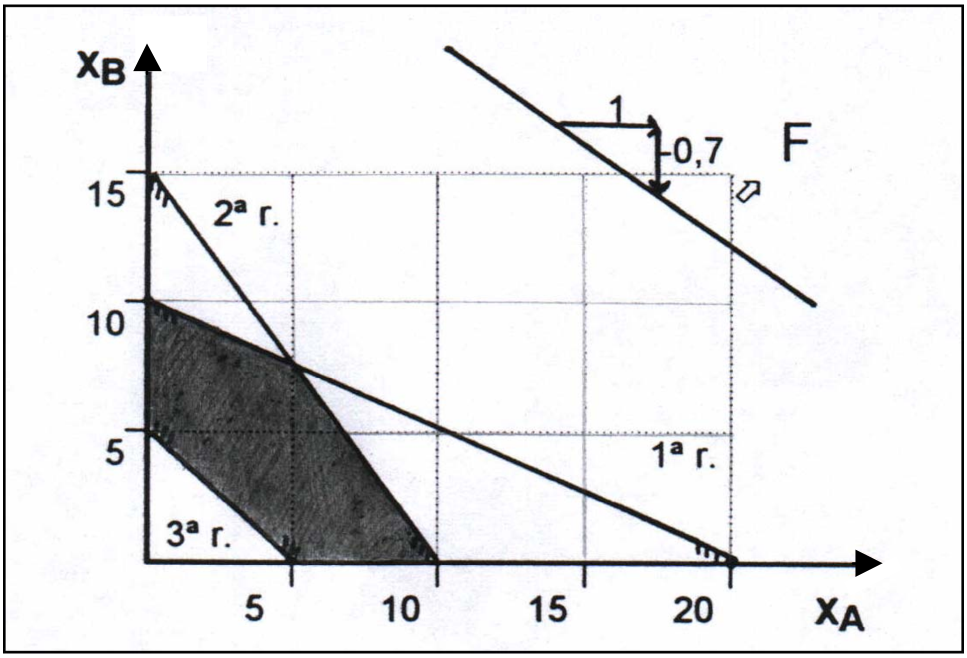
$$\text{MAX } F = 5 . X_A + 10 . X_B + 0 . F_1 + 0 . F_2 + 0 . F_3 + 0 . F_4$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
1 . X_A + 2 . X_B + 1 . F_1 + 0 . F_2 + 0 . F_3 + 0 . F_4 &= 20 \\
3 . X_A + 2 . X_B + 0 . F_1 + 1 . F_2 + 0 . F_3 + 0 . F_4 &= 30 \\
1 . X_A + 1 . X_B + 0 . F_1 + 0 . F_2 - 1 . F_3 + 0 . F_4 &= 5 \\
1 . X_A + 1 . X_B + 0 . F_1 + 0 . F_2 + 0 . F_3 + 1 . F_4 &= 12{,}5
\end{aligned}$$

$$X_A , X_B , F_1 , F_2 , F_3 \geq 0 .$$

Esbocemos a resolução gráfica do problema:



A solução óptima do problema corresponde à aresta definida pelos pontos (5 , 7,5) e (0 ; 10), com o valor óptimo da função objectivo igual a 100.

Aproveitemos a figura anterior (em que se sombreou o **espaço de soluções admissíveis**) para observar os pontos, correspondentes a soluções, que se indica no quadro seguinte e classificá-los adequadamente:

Ponto	Variáveis						É solução				
nº	X_A	X_B	F_1	F_2	F_3	F_4	s.b.a	s.n.b.a.	s.b.n.a.	s.n.b.n.a.	Obs.
1	7	-1	15	11	1	6,5				✓	
2	-10	15	0	30	0	7,5			✓		Inters. 1ª/3ª restr.
3	-1	6	11	9	0	7,5				✓	∈ 3ª restr.
4	5	0	15	15	0	7,5	✓				Vértice esp.sol.adm.
5	6	0	14	12	1	6,5		✓			∈ eixo X_A
6	10	0	10	0	5	2,5	✓				Vértice esp.sol.adm.
7	20/3	5	10/3	0	20/3	5/6		✓			∈ 2ª restr.
8*	**5**	**7,5**	**0**	**0**	**7,5**	**0**	✓**Degen !**				Vértice esp.sol.adm.
9*	**2**	**9**	0	6	6	1,5		✓			∈ 1ª restr.
10*	**0**	**10**	0	10	5	2,5	✓				Vértice esp.sol.adm.
11	0	8	4	14	3	4,5		✓			∈ eixo X_B
12	0	5	10	20	0	7,5	✓				Vértice esp.sol.adm.
13	3	2	13	17	0	7,5		✓			∈ 3ª restr.
14	5	5	5	5	5	2,5		✓			∈ Int. esp.sol.adm.
15	7	3	7	3	5	2,5		✓			∈ Int. esp.sol.adm.

Nota (*) : Os pontos nº 8, 9 e 10 são algumas das soluções óptimas do problema.

Este problema tem 4 restrições e 6 variáveis (na forma standard). Assim, uma solução para ser básica deverá ser constituída por duas variáveis não básicas (isto é, nulas).

Como anteriormente, pode constatar-se que **todas as soluções básicas são vértices do espaço de soluções** .

Neste problema podemos observar duas particularidades:

- Está-se perante uma situação de multiplicidade de soluções óptimas (de que os pontos nº 8, 9 e 10 são alguns exemplos). Os pontos nº 8 e 10 representam soluções básicas, isto é, correspondem a vértices do espaço de soluções admissíveis. O ponto nº 9 representa uma solução não básica, isto é, não corresponde a um vértice do espaço de soluções admissíveis.

- Das cinco soluções básicas admissíveis indicadas no quadro, uma delas (a correspondente ao ponto nº 8) é **degenerada**. Com efeito, relativamente a essa solução têm-se **três variáveis nulas**... Ora, referiu-se anteriormente que, neste problema, **"uma solução para ser básica deverá ser constituída por duas variáveis não básicas (isto é, nulas)"**.

Haverá aqui alguma contradição ? Não, apenas a necessidade de precisar um pouco melhor este conceito: num problema de Programação Linear com **m restrições** e **n variáveis** (na forma standard), se uma solução tiver **exactamente (n-m) variáveis nulas**, estaremos perante uma **solução básica não degenerada**; se, pelo contrário, **o número de variáveis nulas exceder (n-m)**, estaremos perante uma **solução básica degenerada**.

Normalmente um vértice é definido pela intersecção de duas restrições. Quando um vértice é definido pela intersecção de mais de duas restrições, estar-se-á perante uma solução básica degenerada - no exemplo, o vértice correspondente ao ponto nº 8 é definido pela intersecção de três restrições... isto é, "uma a mais", pelo que teremos uma variável nula "a mais"... [Podemos imaginar que este vértice corres- ponde à "sobreposição de três vértices"; daí que a situação de degenerescência possa trazer algumas dificuldades aos algoritmos "normais"...]

Precisemos, então, a caracterização da noção **"solução básica"**: **num problema de Programação Linear com m restrições e n variáveis (na forma standard), uma solução é básica se tiver, pelo menos, (n-m) variáveis nulas.** Se o número de variáveis nulas for exactamente igual a (n-m) estaremos perante uma **solução básica não degenerada**; se, pelo contrário, o número de variáveis nulas exceder (n-m), estaremos perante uma **solução básica degenerada**.

Recordemo-nos dos aspectos mais importantes da resolução de um problema de Programação linear com duas variáveis, pelo "Método Gráfico": depois de representado o espaço de soluções admissíveis é importante representar uma recta pertencente à família de rectas paralelas associada à função objectivo; de seguida identificamos o sentido de movimento dessa recta correspondente ao aumento (num problema de maximização) do valor da função objectivo; finalmente, desloca-se a recta no sentido desejado até que, pela última vez, ela toque o espaço de soluções admissíveis - nessa altura, está identificada a solução óptima do problema.

Já se referiu que se um problema de Programação Linear admitir uma única solução óptima, ela é obrigatoriamente um vértice do espaço de soluções admissíveis. Numa situação de multiplicidade de soluções óptimas, sabe-se que, pelo menos, uma das soluções óptimas é um vértice do espaço de soluções admissíveis.

Referiu-se agora que todo o vértice do espaço de soluções admissíveis é uma solução básica.

Assim, resulta clara a **importância das soluções básicas** na pesquisa da solução óptima de um problema de Programação Linear. Um algoritmo para resolver um problema deste tipo deverá analisar as soluções básicas admissíveis para encontrar a(s) solução(ões) óptima(s).

Um algoritmo muito rudimentar consistiria em **enumerar** todas as soluções básicas admissíveis, determinar (para cada uma delas) o valor correspondente da função objectivo e, finalmente seleccionar a(s) solução(ões) que optimizam o valor da função objectivo...

Uma pergunta pertinente surge de imediato: **Quantas soluções básicas admissíveis tem um problema de Programação Linear ?** Para responder a esta questão lembremo-nos que numa solução básica há tantas variáveis básicas (normalmente não nulas) quantas as restrições. Assim, **num problema de Programação Linear com m restrições e n variáveis (na forma standard)** [n > m] **, uma solução é básica se tiver m variáveis básicas e (n-m) variáveis não básicas**. Só que nem toda a solução básica é admissível... Assim, poderemos, apenas, indicar um **limite superior para o número de soluções básicas admissíveis de um problema de Programação Linear com m restrições e n variáveis (na forma standard)** : C^n_m **= n ! / (m ! / (n-m) !)** .

Tomemos, como exemplo, a variante do problema 1 que apresentamos anteriormente - um problema de Programação Linear com 4 restrições e 6 variáveis (na forma standard). Para este (muito pequeno !) problema, esse limite superior viria igual a **15**. Na realidade, o espaço de soluções admissíveis tem apenas **5** vértices (ainda que um deles corresponda a uma s.b.a.degenerada) !

Num problema (ainda considerado pequeno) com 10 restrições e 15 variáveis, o limite superior do número de soluções básicas admissíveis subiria já a 3003 ... Como facilmente se compreende, a enumeração de soluções básicas não é uma via razoável para se pesquisar a solução óptima de um problema de Programação Linear ... Torna-se necessário encontrar um algoritmo "mais inteligente"...

Antes de pensarmos num algoritmo para a resolução de problemas de Programação Linear, convém realçar que todas as considerações feitas a partir da análise de um problema resolúvel pelo Método Gráfico são válidas em problemas com um número mais elevado de variáveis.

Aliás, recordando-nos de algumas noções da Álgebra Linear e Geometria Analítica, poderemos constatar muito facilmente que **cada restrição de um problema de Programação Linear representa um hiperplano**.

Por outro lado, é fácil mostrar que **um hiperplano é um conjunto convexo**. Sabendo que **a intersecção de conjuntos convexos é ainda um conjunto convexo**, torna-se imediata a conclusão: **o espaço de soluções admissíveis de um problema de Programação Linear é um conjunto convexo !** (E, dado o carácter linear das restrições, não se trata de um qualquer conjunto convexo, mas sim de um **politopo convexo**)

Uma solução admissível de um problema de Programação Linear é um ponto desse politipo convexo; uma solução básica admissível é um vértice desse politopo convexo.

A função objectivo de um problema de Programação Linear representa também um hiperplano.

Prova-se que **o máximo / mínimo de uma função linear sobre um politopo convexo corresponde a, pelo menos, um vértice do politopo**.

Os resultados anteriores podem ser sintetizados no **Teorema Fundamental da Programação Linear**:

Dado um problema de Programação Linear, na forma

Maximizar $F = c_1 . X_1 + c_2 . X_2 + c_3 . X_3 + ... + c_n . X_n$

sujeito a:

$$
\begin{aligned}
a_{11} . X_1 + a_{12} . X_2 + a_{13} . X_3 + ... + a_{1n} . X_n &= b_1 \\
a_{21} . X_1 + a_{22} . X_2 + a_{23} . X_3 + ... + a_{2n} . X_n &= b_2 \\
... \\
a_{m1} . X_1 + a_{m2} . X_2 + a_{m3} . X_3 + ... + a_{mn} . X_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$X_1 , X_2 , X_3 , ... , X_n \geq 0$

se existe uma solução admissível, então existe uma solução básica admissível, e se existe uma solução óptima admissível, então existe uma solução básica óptima admissível.

Podemos, assim, justificar as referências feitas à **importância das soluções básicas** na pesquisa da solução óptima de um problema de Programação Linear. Apresentaremos em seguida um algoritmo para resolver problemas de Programação Linear, que, de um "modo inteligente" analisa as soluções básicas admissíveis para encontrar a(s) solução(ões) óptima(s) do problema.